

110年公務人員高等考試三級考試試題

類 科：電力工程、電子工程、電信工程

科 目：工程數學

考試時間：2小時

座號：_____

※注意：可以使用電子計算器。

甲、申論題部分：(50分)

- (一)不必抄題，作答時請將試題題號及答案依照順序寫在申論試卷上，於本試題上作答者，不予計分。
- (二)請以藍、黑色鋼筆或原子筆在申論試卷上作答。
- (三)本科目得以本國文字或英文作答。

一、求 $y'' + 8xy' + 16y = 1 + e^{-4x}$ 的通解 (general solution)。(15分)

二、求 $\int_{\varphi} z^2 dz$ ，其中 $\varphi = t + i2t$ ， $0 \leq t \leq 1$ 。(10分)

三、一副標準 52 張的撲克牌，隨意抽出 3 張。求其為同花 (3 張為同一花色) 的機率。(5分)

四、 $A = \begin{bmatrix} 5 & -4 & 4 \\ 12 & -11 & 12 \\ 4 & -4 & 5 \end{bmatrix}$ ，

- (一)求其行列式值 (determinant)。(5分)
- (二)求特徵值 (eigenvalues) 與其對應的特徵向量 (eigenvectors)。(10分)
- (三)求 P ，使 $P^{-1}AP$ 為 A 之對角化 (diagonalized) 矩陣。(5分)

乙、測驗題部分：(50分)

代號：2376

- (一)本測驗試題為單一選擇題，請選出一個正確或最適當的答案，複選作答者，該題不予計分。
- (二)共 20 題，每題 2.5 分，須用 2B 鉛筆在試卡上依題號清楚劃記，於本試題或申論試卷上作答者，不予計分。

1 2×2 實數矩陣 Q 的特徵值為 -2 、 -3 。若定義矩陣跡 (trace) 為對角線元素相加，則 Q 的跡 (trace) 為何值？

- (A) -5 (B) -3 (C) -2 (D) 5

2 令 T 和 S 為 R^3 映射至 R^2 的線性轉換 (linear transformation)，其中 $T(x, y, z) = (x - y, z + y)$ ， $S(x, y, z) = (x + z, x + y)$ 。下列向量何者屬於 $T + S$ 的零空間 (nullspace)？

- (A) $(6, 2, -10)$ (B) $(3, 2, -5)$ (C) $(3, -2, 5)$ (D) $(-6, -2, -10)$

3 給定矩陣 $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 5 & 0 & 2 \\ 4 & 4 & 1 \end{bmatrix}$ ， $B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 5 & 7 & 9 \\ 4 & 2 & 6 \end{bmatrix}$ ， $C = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 2 \\ 10 & 0 & 4 \\ 8 & 8 & 2 \end{bmatrix}$ 。則矩陣 ABC^{-1} 的行列式值為何？

- (A) -6 (B) -0.75 (C) 0.25 (D) 0.75

4 考慮如下所示之過度限制 (over-determined) 線性聯立方程式：

$$\begin{cases} x+y=3 \\ x+2y=-1 \\ x+3y=2 \\ x+4y=7 \end{cases}$$

如果這個聯立方程式的最小平方誤差解 (least-squared-error solution) 為 $x=\alpha, y=\beta$ ，那麼在下列敘述之中，何者為正確？

- (A) $\alpha > \beta$ (B) $\alpha^2 > \beta$ (C) $\alpha + \beta > \alpha \cdot \beta$ (D) $3\alpha + 2\beta > 0$

5 考慮一個作用在 $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ 的線性轉換 (linear transformation) T 。已知 $T(1, -1) = (3, 2)$ 、 $T(1, 1) = (1, -5)$ 。若是 S 表示 T 的反轉換 (inverse transformation)，而且 $S(2, -7) = (p, q)$ ，那麼 $p+q$ 與下列那一個數值最接近 (也就是說差值的絕對值最小)？

- (A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6

6 考慮如下所示之線性聯立方程式：

$$\begin{cases} 2x_1 + 0x_2 + 0x_3 - 3x_4 = 1 \\ 0x_1 + 5x_2 + \alpha x_3 + 0x_4 = -7 \\ 1x_1 + 6x_2 + 2x_3 + 0x_4 = 13 \\ 0x_1 + 1x_2 - 2x_3 + 3x_4 = -2 \end{cases}$$

若是已知此聯立方程式無解，那麼在下列有關於 α 之敘述，何者正確？

- (A) $-\infty < \alpha \leq -5$ (B) $-5 < \alpha \leq 0$ (C) $0 < \alpha \leq 5$ (D) $5 < \alpha < \infty$

7 我們考慮一個矩陣： $\begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 \\ -2 & x & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ ，若已知此矩陣為不可逆 (not invertible)，那麼請問 x 的數值為何？

- (A) -3 (B) 12 (C) $2\sqrt{3}$ (D) 4

8 有一條三維空間中的曲線，曲線上的點的坐標 (x, y, z) 以參數式來表示為： $x(t)=2\sin(t)$ 、 $y(t)=2\cos(t)$ 、

$z(t)=5t$ 。請問此曲線在 $(0, 2, 0)$ 到 $(\sqrt{3}, 1, 5 \cdot \frac{\pi}{3})$ 這個區間內的長度與下列那一個數值最接近 (也就是說

說差值的絕對值最小)？

- (A) 2 (B) 4 (C) 6 (D) 8

- 9 如果 $3e^{i\pi/3} + 5e^{-i\pi/4} + 2e^{i\pi} = x + iy$ ($i = \sqrt{-1}$)，那麼下列有關於 x 、 y 之敘述，何者正確？
- (A) $x \cdot y < 0$ (B) $x + y < 0$
 (C) $|x| < |y|$ ($|x|, |y|$ 分別代表 x 與 y 之絕對值) (D) $x - y < x + y$
- 10 令 i 為單位虛數，則 $\sin(\pi + i)$ 的實部 (real part) 為何？
- (A) π (B) 1 (C) -1 (D) 0
- 11 若積分路徑 C 為逆時鐘方向且滿足 $|z| = 1$ ，則複變函數積分 $\oint_C 3 \frac{4z^2 + z + 2}{z(4z^2 - 17z + 4)} dz$ 之值為何？
- (A) πi (B) $-\pi i$ (C) $-2\pi i$ (D) $-13\pi i$
- 12 我們考慮複變函數 $f(z) = z^2 + 1$ ($z = x + iy$) 沿著曲線 Γ 作線積分 (line integral)，其中 Γ 代表在複數平面上由 $y = x^2$ 來描述的曲線；我們的積分範圍是從 $0 + i0$ 到 $1 + i1$ 。我們用 $\alpha + i\beta$ 來代表這一個線積分的結果，此結果可以看成複數平面上的一個點。若是採用這個觀點，那麼 $\alpha + i\beta$ 與下列複數平面上的四個點之中的那一個最接近 (也就是距離最小)？
- (A) $0 + i0$ (B) $1 + i1$ (C) $1 + i0$ (D) $0 + i1$
- 13 考慮如下所示之初始值問題 (initial-value problem)：
- $$y'' - x^2 y' - 3xy = 0; y(0) = 1, y'(0) = -2$$
- 如果我們將解 (solution) 寫成幕級數 (power series) 型式：
- $$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$
- 那麼，下列選項何者正確？(可以試著套用函數的泰勒級數展開表示法 (Taylor-series expansion)。
- (A) $a_0 = 2$ (B) $a_1 = \frac{1}{3}$ (C) $a_2 = \frac{3}{2}$ (D) $a_3 = \frac{1}{2}$
- 14 假設 $y(x)$ 可以由下列微分方程來描述：
- $$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 - 1}{2y + 5}$$
- 而且合乎初始條件： $y(1) = -1$ 。請問 $y(0) = ?$
- (A) -2 或 -3 或 5 (B) 2 (C) -4 或 -1 (D) 3 或 4

15 下列選項之中，何者屬於線性（linear）微分方程式？

(A) $y''(t)+t^2 \cdot y'(t)+\cos(t) \cdot (y(t))^2=0$

(B) $y''(t)+2y'(t)+e^{-t} \cdot y(t)=\sin(2t)$

(C) $y(t) \cdot y''(t)+t^2 \cdot y'(t)+\cos(t) \cdot y(t)=0$

(D) $y''(t)+2t \cdot y'(t)+e^{-t} \cdot y(t)=\sqrt{y(t)}$

16 給定微分方程式 $\frac{dy}{dt}+2y=t\delta(t-2)$ ，初始值為 $y(0)=0$ ， $\delta(t)$ 為脈衝函數（impulse function）。則

$y(t)$ 的拉氏轉換（Laplace transform）為何？

(A) $\frac{2}{s+2}e^{-2s}$

(B) $\frac{1}{s^2(s+2)}e^{-2s}$

(C) $\frac{s^2}{s^2(s+2)}e^{-2s}$

(D) $\frac{2s^2}{s^2(s+2)}e^{-2s}$

17 考慮微分方程式 $y''+5y'+6y=x$ ，初始值為 $y(0)=A$ 和 $y'(0)=B$ 。若其解為

$$y=\frac{1}{2}e^{-2x}-\frac{1}{3}e^{-3x}+\frac{1}{6}x+C$$

，則 $A+B+C$ 為下列何值？

(A) 2

(B) $\frac{1}{3}$

(C) $\frac{1}{18}$

(D) $\frac{1}{36}$

18 有兩位桌球選手，根據以往的經驗，在每一局的比賽之中兩人的勝率比例為 6 比 4。如果他們進行一場五戰三勝的比賽（也就是搶先贏得三局的選手為整場比賽的勝利者），那麼請問這場比賽會剛好在打完第四局的時候分出勝負的機率為何？

(A) $\frac{75}{625}$

(B) $\frac{162}{625}$

(C) $\frac{234}{625}$

(D) $\frac{375}{625}$

19 有兩個隨機變數 X 與 Y ，我們以 $P_{XY}(x,y)=\text{Prob}(X=x,Y=y)$ 來代表其合併機率函數（joint probability function），且其值如下所示： $P_{XY}(1,1)=0.07$ 、 $P_{XY}(1,2)=0.09$ 、 $P_{XY}(1,3)=0.12$ 、 $P_{XY}(2,1)=0.25$ 、 $P_{XY}(2,2)=0.07$ 、 $P_{XY}(2,3)=0.18$ 、 $P_{XY}(3,1)=0.06$ 、 $P_{XY}(3,2)=0.07$ 、 $P_{XY}(3,3)=0.09$ 。請計算下列條件機率之值： $\text{Prob}(Y=3|X=2)=?$

(A) 0.25

(B) 0.36

(C) 0.60

(D) 0.84

20 設 X 為一連續隨機變數（random variable），機率密度函數（probability density function）為常態分布（normal distribution），平均值為 45，標準差為 15。若欲將 X 轉換為 Y ，其機率密度函數仍為常態分布，平均值為 65，標準差為 10。則 X 與 Y 的關係式為下列何者？

(A) $Y=\frac{1}{3}X+50$

(B) $Y=\frac{2}{3}X+35$

(C) $Y=\frac{2}{5}X+47$

(D) $Y=X+20$

測驗式試題標準答案

考試名稱：110年公務人員高等考試三級考試暨普通考試

類科名稱：電子工程、電力工程、電信工程

科目名稱：工程數學（試題代號：2376）

單選題數：20題

單選每題配分：2.50分

複選題數：

複選每題配分：

標準答案：

題號	第1題	第2題	第3題	第4題	第5題	第6題	第7題	第8題	第9題	第10題
答案	A	A	B	C	A	C	D	C	A	D

題號	第11題	第12題	第13題	第14題	第15題	第16題	第17題	第18題	第19題	第20題
答案	B	D	D	C	B	A	C	C	B	B

題號	第21題	第22題	第23題	第24題	第25題	第26題	第27題	第28題	第29題	第30題
答案										

題號	第31題	第32題	第33題	第34題	第35題	第36題	第37題	第38題	第39題	第40題
答案										

題號	第41題	第42題	第43題	第44題	第45題	第46題	第47題	第48題	第49題	第50題
答案										

題號	第51題	第52題	第53題	第54題	第55題	第56題	第57題	第58題	第59題	第60題
答案										

題號	第61題	第62題	第63題	第64題	第65題	第66題	第67題	第68題	第69題	第70題
答案										

題號	第71題	第72題	第73題	第74題	第75題	第76題	第77題	第78題	第79題	第80題
答案										

題號	第81題	第82題	第83題	第84題	第85題	第86題	第87題	第88題	第89題	第90題
答案										

題號	第91題	第92題	第93題	第94題	第95題	第96題	第97題	第98題	第99題	第100題
答案										

備註：